Colle du 23/03 - Sujet 1
Séries et analyse asymptotique

Question de cours. Démontrer l'existence d'un supplémentaire.

Exercice 1. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ converge puis calculer sa somme totale.

Exercice 2. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de $x \mapsto \frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{\cos(x)}$.

Colle du 23/03 - Sujet 2
Séries et analyse asymptotique

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de comparaison.

Exercice 1.

1. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^p$.
2. On suppose $p = 1$. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{2}{x}} \sqrt{1+x^2} \arctan(x)$. Déterminer le domaine de définition de f puis étudier son comportement en $+\infty$.

Colle du 23/03 - Sujet 3
Séries et analyse asymptotique

Question de cours. Démontrer le théorème d'encadrement série-intégrale.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Exercice 2. Soit $(E) : x^3 + nx - 1 = 0$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ solution de (E).
2. Déterminer la limite de u_n.
3. Déterminer un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n^5}$.